

Εστω ότι έχουμε το σωστό X_{n+2} και ψάχνουμε το $P^*(X_{n+2})$

$$\text{με } E_n(f; X_{n+2}) = |f(x_i) - P^*(X_{n+2}; x_i)|$$

$$\text{Επίσης, } f(x_i) - P^*(X_{n+2}; x_i) = \lambda(-1)^i \quad \text{όπου } |\lambda| = E_n(f, X_{n+2})$$

$$\text{Εστω ότι } P^*(X_{n+2}; x_i) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$$

$$\text{τότε } \lambda(-1)^i + P^*(X_{n+2}; x_i) = f(x_i) \Leftrightarrow \lambda(-1)^i + \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^2 + \dots + \alpha_n x_i^n = f(x_i)$$

για $i = 1, 2, \dots, n+2$.

Ετσι, προκύπτει γραμμικό σύστημα $n+2$ εξισώσεων με $n+2$ αγνώστους

μικτός των x_i

$$\begin{matrix} X \cdot \alpha = f \\ (x_1, \dots, x_{n+2})^T \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+2} & 1 & x_{n+2} & x_{n+2}^2 & \dots & x_{n+2}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n+2} \end{bmatrix}$$

αν το άνω βρεθόν σύστημα και το σφάλμα και το πολωνικό. Μήπως είναι αυτή της μεθόδου μικρά σφάλματα επιπλέον μεγάλα σφάλματα στη λύση του συστήματος αλλά είναι πιο απορροφητικά από τον πραγματικό που υπάρχει

Άσκηση 3 (σελ. 45)

$$\text{Εστω } X_4 = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

$$\text{fixαμε βρεί } X_{4,2} = \{-1, 0, 2\} \quad \text{με } \lambda = -1$$

Γράφουμε το σύστημα και εφαρμόζουμε τον αναλογικό Gauss

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{X} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{f}$$

Λύνουμε με πρόβ. τα πίσω αντικατάσταση

$$\Rightarrow \alpha = [-1, 1, 1]^T$$

$$\text{Ετσι, } P_{1,2}^*(x_{4,2}; x) = 1 + x$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΝΑΛΛΑΓΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ (Η' ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Remez)

Ονομάζουμε ή συμβολίζουμε $\{x_\sigma\}$ ή $\{x_n\}$ ή $\{x_n\}$ τα σύνολα αποτελούμενα από $n+2$ σημεία όπου είναι υποσύνολα του X_m . Με x_σ ή x_n ή x_n συμβολίζουμε τις τιμές αυτών.

για παράδειγμα $\sum_{\sigma} x_\sigma = \sum_{i=1}^{n+2} x_i$, $x_i \in \{x_\sigma\}$

Το λείποτο πολώνιο στο $\{x_\sigma\}$ ως P_σ και το σφάλμα

$$r_\sigma = t_n(f, \{x_\sigma\}) = |f(x_\sigma) - P_\sigma(x_\sigma)|$$

Παίρνουμε ένα σύνολο διαφόρων $\{x_\sigma\} \subset X_m$ αποτελούμενο από

$n+2$ σημεία, βρίσκουμε τη βση της f στο $\{x_\sigma\}$: P_σ ,

βρίσκουμε τη συνάρτηση σφάλμα $e_\sigma(x) = f(x) - P_\sigma(x)$

για $x \in X_m$ με X_m διατεταγμένο σωστό, εάν τότε

$\max_{x \in X_m} |e_\sigma(x)| = r_\sigma$ τότε P_σ θα είναι η βση μας για

το X_m . Αν όμως $\max_{x \in X_m} |e_\sigma(x)| = M > r_\sigma$ τότε το

P_σ όχι δέχεται ομομορφία πράξη για το X_m

Εστω $x_j \in X_m \setminus \{x_\sigma\}$ τέτοιο ώστε $|e_\sigma(x_j)| = M$

Θεωρούμε ως σωστό αναφοράς ένα άλλο σωστό που προκύπτει

από το $\{x_\sigma\}$, βάζοντας ως νέο σημείο το x_j (από που μας

έδωσε το $\max$) και αφαιρώντας εκείνο το σημείο των x_σ ώστε

τα πρόσημα του σφάλματος, e_σ στο X_m να είναι εναλλάσσόμενα

Αν το x_j είναι ανάμεσα από τα σημεία του $\{x_\sigma\}$ τότε

βάζουμε το διπλανό σημείο από το x_j που δίνει ομοσημο

σφάλμα με το x_j . Αν είναι ακραίο σημείο τότε βάζουμε

(ή εξαίρουμε) το διπλανό σημείο του x_j στο $\{x_\sigma\}$ που

δίνει ομοσημο σφάλμα, αν όχι ομοσημο σφάλμα βάζουμε

το άλλο άκρο.

Θα αποδείξουμε ότι από το $\{x_\sigma\}$ στο $\{x_n\}$ πάντα από

μικρότερο σε μεγαλύτερο σφάλμα: Δηλαδή $r_n > r_\sigma$

Γνωστό ότι $w'(x_i) = (x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) =$

$$= |w'(x_i)| (-1)^{n-i} \text{ και } \lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n+2} f(x_i) / w'(x_i)}{\sum_{i=1}^{n+2} (-1)^i / w'(x_i)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n+2} f(x_i) / |w'(x_i)| \cdot (-1)^{n-i}}{\sum_{j=1}^{n+2} (-1)^j / |w'(x_j)| \cdot (-1)^{n-j}} = \frac{\sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{|w'(x_i)|} (-1)^i f(x_i)}{\sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{|w'(x_j)|}} =$$

λ_i

$$= \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i (-1)^i f(x_i) \quad \text{όπου } \lambda_i > 0 \text{ και } \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 1$$

Επομένως, το λ δίνεται ως κυρτός συνδυασμός των $(-1)^i \cdot f(x_i)$.

$$\text{Έστω } P \in P_n \text{ τότε } \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i \cdot (-1)^i P(x_i) = 0$$

Το σφάλμα λ που δίνει η συνάρτηση P στον P_n επειδή $P \in P_n$, η βση θα είναι P με σφάλμα 0.

Θα υπολογίσουμε το ρ_λ :

$$\rho_\lambda = |\lambda| = \left| \sum_{\mu} \lambda_{\mu} (-1)^{\mu} f(x_{\mu}) \right| = \left| \sum_{\mu} \lambda_{\mu} (-1)^{\mu} f(x_{\mu}) - \underbrace{\sum_{\mu} \lambda_{\mu} (-1)^{\mu} P(x_{\mu})}_{=0} \right| =$$

$$= \left| \sum_{\mu} \lambda_{\mu} (-1)^{\mu} (f(x_{\mu}) - P(x_{\mu})) \right| = \left| \sum_{\mu} \lambda_{\mu} (-1)^{\mu} e_{\sigma}(x_{\mu}) \right| =$$

$$= \sum_{\mu} \lambda_{\mu} |e_{\sigma}(x_{\mu})| = \sum_{\mu \neq j} \lambda_{\mu} \rho_{\sigma} + \lambda_j |e_{\sigma}(x_j)| = \sum_{\mu \neq j} \lambda_{\mu} \rho_{\sigma} + \lambda_j M =$$

$$= \sum_{\mu} \lambda_{\mu} \rho_{\sigma} + \lambda_j (M - \rho_{\sigma}) = \rho_{\sigma} + \lambda_j (M - \rho_{\sigma}) > \rho_{\sigma}$$

Άσκηση 5:

Να βρεθεί η βση των $f \in X_S$, στον P_1 όπου

$$X_S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Παίρνω $\{x_{\sigma}\} = \{-2, -1, 0\}$. Θα βρω τη βση με τη μέθοδο προσδιορισμών συντελεστών

$$\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

Και με προς τα πίσω αντικατάσταση

$$\alpha = (-1, 0, 0)$$

Δηλαδή $\lambda = -1$ και $\rho_{\sigma} = |\lambda| = 1$ (σφάλμα)

$$\text{Πολυώνυμο: } P_{\sigma}(x) = 0$$

$$e(-2) = 1 - 0 = 1, \quad e(-1) = -1 - 0 = -1$$

$$e(0) = 1, \quad e(1) = 2 - 0 = 2, \quad e(2) = 0 - 0 = 0$$

$$M = 2 > \rho_{\sigma} = 1. \text{ Αναγκαστικά βγαίνει το 0}$$

Δηλ. έχω βγαίνει το 1 και έβγαζε το 0

(28)

Ετσι, $\{X_\mu\} = \{-2, -1, 1\}$ Άρα με Gauss το έχουμε:

$$\begin{array}{cccc} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & \\ 0 & 3 & 1 & \end{array}$$

Με ηρω τα πέντε συντελεστές

$$\alpha = \left(-\frac{7}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\lambda = -\frac{7}{6}, \rho_\mu = \frac{7}{6}$$

$$p_\mu(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$$

$$e(-2) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(-2)\right) = \frac{7}{6} \checkmark$$

$$e(-1) = -1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(-1)\right) = -\frac{7}{6} \checkmark$$

$$e(0) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0\right) = \frac{1}{2} < \frac{7}{6}$$

Ενthalasson auto

$$e(1) = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1\right) = \frac{7}{6} \checkmark$$

$$e(2) = 0 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2\right) = -\frac{7}{6} \checkmark$$

$$M = \frac{7}{6} = \rho_\mu, \text{ επομένως } p_i^*(x_5; x) = p_\mu(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x = p_2^*(x_5; x)$$

Αρα 100% βελτιώνεται στο p_2

Άσκηση 7:

Να βρεθεί η βάρ τιμή των $f \in X_5$, όπου

$$X_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ f_i & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & \\ 0 & 2 & 1 & \end{array}$$

$$\{X_0\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$\alpha = \left(-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \sim \lambda = -\frac{5}{4}$$

$$p_0 = \frac{5}{4}, \quad p_0(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$$

Σφαίματα στον X_5

$$e(-2) = 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(-2) \right) = \frac{3}{4} \quad \leftarrow \text{εξόδος}$$

$$e(-1) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(-1) \right) = \frac{5}{4} \quad (\text{αναμενόμενο}) \quad \checkmark$$

$$e(0) = -1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(0) \right) = -\frac{5}{4} \quad \checkmark$$

$$e(1) = 2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1) \right) = \frac{5}{4} \quad \checkmark$$

$$e(2) = -2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(2) \right) = -\frac{13}{4} \quad \leftarrow \text{εισόδος}$$

$$M = \frac{13}{4} > p_0 = \frac{5}{4}$$

Επεί,

$$\{X_M\} = \{0, 1, 2\}$$

$$\left. \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ & 2 & 1 & 1 \\ & 0 & 2 & -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Προς τα πίσω αλματάρισμα} \\ \alpha = \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right) \end{array}$$

$$\lambda = \frac{7}{4}, \quad p_M = \left\lceil \frac{7}{4} \right\rceil = \frac{7}{4}, \quad p_M = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x$$

$$e(-2) = 0 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(-2) \right) = -\frac{7}{4}$$

$$e(2) = -2 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(2) \right) = -\frac{7}{4} \quad \checkmark$$

$$e(-1) = 1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(-1) \right) = -\frac{1}{4}$$

$$M = \frac{7}{4} = p_M$$

$$e(0) = -1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(0) \right) = -\frac{7}{4} \quad \checkmark$$

$$p_i^+(X_5; x) = p_M(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x$$

Αν είναι στον p_2 δίνει ένα extra